Z Q

(Rud)

Théorème de Montel

L 201
L 203
L 205
L 245

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$
et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $K_n = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq n$ et $d(z, {}^c\Omega) \geq \frac{1}{n} \}$
alors (K_n) est une suite exhaustive de compacts de Ω.
On pose, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $p_n(f) = \sup_{z \in K_n} |f(z)|$, p_n semi-norme
et $\forall f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\delta(f,g) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}$

Th : $(\mathcal{H}(\Omega), \delta)$ est un espace métrique complet,
et δ est la distance de la convergence uniforme sur tout compact.

Théorème de Montel : Soit $A \subset \mathcal{H}(\Omega)$. On a équivalence entre :
(i) A est localement bornée : $\forall K \Subset \Omega, \exists M_K > 0, \forall z \in K, \forall f \in A, |f(z)| \leq M_K$
(ii) A est relativement compacte dans $(\mathcal{H}(\Omega), \delta)$

Démonstration : $\Leftarrow$] Par la contraposée

Supposons que A ne soit pas localement bornée :
$\exists K \Subset \Omega, \forall n \in \mathbb{N}, \exists z_n \in K, \exists f_n \in A$ tq $|f_n(z_n)| > n$.

alors $\|f_n\|_K = \sup_{z \in K} |f_n(z)| \geq |f_n(z_n)| > n$

d'où $\|f_n\|_K \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$

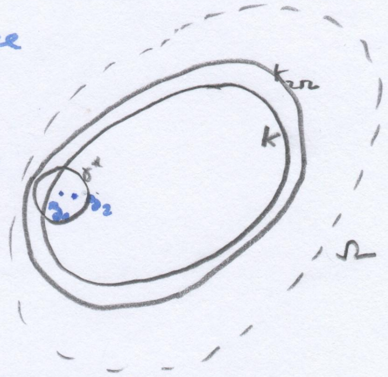
Donc on ne peut pas extraire de (f_n) une suite convergente sur K
d'où A n'est pas relativement compacte.

$\Rightarrow$] Supposons $\mathcal{A}$ localement bornée.

Commençons par un lemme, propre aux fonctions holomorphes :

Lemme : $\forall K \Subset \Omega,\ \exists \lambda_K > 0,\ \forall f \in \mathcal{A},\ \forall z_1, z_2 \in K,\ |f(z_1) - f(z_2)| \leq \lambda_K |z_1 - z_2|$

Dém° : Comme Ω est ouvert, on peut fixer $r > 0$ tel que $K_{2r} = \{ z \in \Omega : d(z, K) \leq 2r \} \subset \Omega$.



Puisque $\mathcal{A}$ est localement bornée, pour le compact K_{2r},
$\exists M = M_{K_{2r}} > 0$ tq $\forall z \in K_{2r}, \forall f \in \mathcal{A}, |f(z)| \leq M$

On pose alors $\lambda_K = \frac{2M}{r} > 0$.

On a ainsi : $\forall f \in \mathcal{A}, \forall z_1, z_2 \in K$,

- Si $|z_1 - z_2| > r$, $|f(z_1) - f(z_2)| \leq 2M = \lambda_K \cdot r \leq \lambda_K |z_1 - z_2|$
- Si $|z_1 - z_2| \leq r$, soit $\gamma = \mathcal{C}(z_1, 2r)$ et γ son image dans $\mathbb{C}$

  On a $\gamma \subset K_{2r}$ et $\forall w \in \gamma$, $|w - z_1| = 2r$

  Par suite, $|w - z_2| \geq |w - z_1| - |z_1 - z_2| \geq 2r - r = r$

  D'après la formule de Cauchy,

$$f(z_1) - f(z_2) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(w) \cdot \left(\frac{1}{w - z_1} - \frac{1}{w - z_2} \right) dw = \frac{z_2 - z_1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_1)(w - z_2)} dw$$

d'où $$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \frac{|z_1 - z_2|}{2\pi} \times 2\pi . 2r \times \frac{M}{2r . r} = \frac{M}{r} |z_1 - z_2| \leq \lambda_K |z_1 - z_2|$$

Comme $(\mathcal{H}(\Omega), \delta)$ est complet, il suffit de montrer que $(\mathcal{A}, \delta)$ précompacte.

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ assez grand pour que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$

On considère l'ensemble $\mathcal{A}/K_N$ des restrictions à K_N des éléments de $\mathcal{A}$.

On a $\mathcal{A}/K_N \subset \mathcal{C}^0(K_N, \mathbb{C})$,

cette partie est équicontinue (même équi-lipschitz) d'après le lemme (pour K_N)

et elle est bornée par l'hypothèse $\mathcal{A}$ localement bornée.

D'après le th d'Ascoli, $\mathcal{A}/K_N$ est relativement compacte puis $\mathcal{A}/K_N$ précompacte

Ainsi, $\exists (f_1, \dots, f_q) \in \mathcal{A}^q$ tq $\forall f \in \mathcal{A}, \exists j \in [\![1, q]\!]$, $\|r_N(f) - r_N(f_j)\|_{K_N} = p_N(f - f_j) \leq \varepsilon$

alors $$\delta(f, f_j) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{p_n(f - f_j)}{2^n \times 1} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{p_N(f - f_j)}{2^n} + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

D'où $\{f_1, \dots, f_q\}$ est un 2ε-réseau de $\mathcal{A}$.

Par suite, $(\mathcal{A}, \delta)$ est précompacte puis $(\overline{\mathcal{A}}, \delta)$ est encore précompacte.

d'où $\overline{\mathcal{A}}$ est précompacte et complète donc $\overline{\mathcal{A}}$ compacte

ie $\mathcal{A}$ relativement compacte.